I- Introdução

A palavra trigonometria é formada por três radicais gregos: tri = três, gonos = ângulos e metron = medir. Daí, o seu significado: medida dos triângulos. Dizemos, então, que a Trigonometria é a parte da Matemática que tem como objetivo o cálculo das medidas dos elementos de um triângulo (lados e ângulos).

Como a Trigonometria procura estabelecer relações entre as medidas de ângulos e de segmentos, foi considerada originalmente como uma extensão da Geometria.

Existem vestígios de um estudo rudimentar de Trigonometria entre os babilônios, que a usam para resolver problemas práticos de navegação, de agrimensura e astronomia. Hoje, sabemos que a Astronomia foi a grande impulsionadora do desenvolvimento da Trigonometria, principalmente entre os gregos e os egípcios. Aliás, foram os astrônomos que estabeleceram os fundamentos da Trigonometria.

Sabe-se que o astrônomo grego Hiparco (190 a.C. - 125 a.C.), considerado o pai da Astronomia, foi quem empregou, pela primeira vez, relações entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo, por volta de 140 a.C. Daí, ser considerado o iniciador da Trigonometria.

Graças a Ptolomeu (125 a.C.), o mais célebre astrônomo da antigüidade, surge o documento mais antigo que trata da Trigonometria: O Almagesto, baseado nos trabalhos de Hiparco. Na Sintaxe Matemática, Ptolomeu apresenta um verdadeiro tratado de Trigonometria Retilínea e Esférica.

Importantes trabalhos hindus foram traduzidos para o árabe, no final do século VIII, mostrando o quanto aquele povo estava familiarizado com este ramo da Matemática e foram os responsáveis pelas notáveis descobertas feitas pelos matemáticos árabes.

No século XV, Purback, um matemático nascido na Baviera, procurou restabelecer a obra de Ptolomeu, introduzindo o seno e a tangente na Trigonometria e construindo a primeira tábua trigonométrica.

Porém, o primeiro tratado de Trigonometria, feito de maneira sistemática, é chamado “De Triangulis” ou “Tratado dos Triângulos” e foi escrito pelo matemático alemão Johann Müller, chamado Regiomontanus, e que foi discípulo de Purback.

Hoje em dia a Trigonometria não se limita a estudar somente os triângulos; sua aplicação se estende a vários campos da Matemática (como a Geometria e a Análise). Encontramos, também, aplicações da Trigonometria em Eletricidade, Mecânica, Acústica, Música, Engenharia Civil, Topografia e em muitos outros campos da atividades, aplicações essas envolvidas em conceitos que dificilmente lembram os triângulos que deram origem à Trigonometria.

II- Contando a História da Trigonometria

Para realizar as construções de que necessitavam, calcular a altura das pirâmides, a largura dos rios, a altura das montanhas etc.; os matemáticos da Antigüidade baseavam-se em dois conceitos:

— razão entre dois números.

— triângulos semelhantes.

Esses procedimentos marcam o início da Trigonometria.

A palavra Trigonometria significa medida dos três ângulos de um triângulo e determina um ramo da Matemática que estuda a relação entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo.

Tales foi um grande estudioso desse ramo da matemática, mas não podemos afirmar que foi seu inventor. A trigonometria não foi obra de um só homem, nem de um povo só.

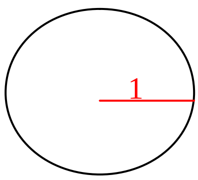
O maior Matemático da Antigüidade, Arquimedes nasceu em Siracusa por volta de 287 a.C. filho de Fídias, famoso matemático e astrônomo, viveu muitos anos em Alexandria, antes de voltar a sua cidade Natal.

Os trabalhos científicos de Arquimedes causam admiração até hoje, sobretudo pela precisão dos cálculos. Ele criou métodos para resolver problemas de áreas e volumes, destacando-se entre os grandes matemáticos da época.

Foi precisamente a resolução de um problema de área que uniu fortemente os nome de Arquimedes ao da circunferência.

Devemos a Arquimedes um método interessante de calcular um valor aproximado de π. Não devemos esquecer, também o interesse que o matemático grego tinha pelas circunferências. Nada mais natural, para um construtor de rodas.

Para calcular o valor de π, Arquimedes considerou um círculo de raio 1.

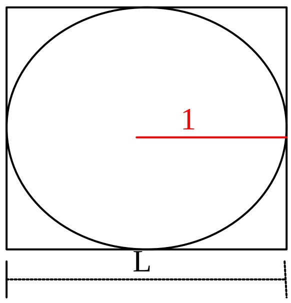


Desse modo, a área do círculo é igual a:

$$\text{área do círculo} = \pi R^2 = \pi (1)^2 = \pi$$

Como grande matemático que era, Arquimedes não ignorava que:

— a área de um círculo é menor que a área do quadrado circunscrito.



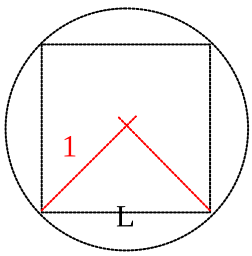
O lado L do quadrado circunscrito mede:

— 2 x raio = 2 x 1 = 2

Como a área do quadrado circunscrito é igual a L^2, temos;

— área do quadrado circunscrito = $2^2 = 4$

— a área de um círculo é maior que a área do quadrado inscrito.



Considerando o quadrado de lado L, podemos escrever:

— área do quadrado inscrito = L^2

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo formado por um lado do quadrado e por raios da circunferência, encontramos:

$$L^2 = 1^2 + 1^2$$

Portanto, temos:

— área do quadrado inscrito = 2

Procedendo assim, Arquimedes obteve:

área do quadrado inscrito $<$ área do círculo $<$ área do quadrado circunscrito.

$$2 < \text{área do círculo} < 4$$

$$2 < \pi < 4$$

Usando dois octógonos, um inscrito e outro circunscrito, Arquimedes conseguiu uma aproximação melhor para π.

$$2{,}8 < \pi < 3{,}3$$

Uma aproximação ainda melhor foi obtida quando o matemático grego usou dois polígonos de 96 lados:

$$3 \text{ x } 10/71 < \pi < 3 \text{ x } 1/7.$$

Isso significa, aproximadamente:

$$3{,}140845 < \pi < 3{,}142857$$

Um resultado fantástico para a época.

No mesmo período em que viveu Arquimedes, outro matemático grego também se destacou: **Eratóstenes** (276-196 a.C.). Natural de Cirene, Eratóstenes viveu parte da juventude em Atenas. Foi um atleta bastante popular, destacando-se em várias modalidades esportivas. Autor de muitos livros de Astronomia e Geometria, escreveu ainda poesias e textos para teatro.

Nenhuma de suas obras, porém, chegou até nós. Tudo o que sabemos sobre Eratóstenes é através de outros autores.

No entanto, apesar de sue múltiplos interesses, ele não conseguiu ser pioneiro em nenhuma das atividades que desenvolveu, nas Ciências ou nas Letras.

Por esse motivo, os gregos o chamavam de **Beta** (β), que é a segunda letra do alfabeto grego, deixando claro que o reconheciam como o segundo em tudo, mas nunca o melhor em nada.

Mas, façamos justiça. Nenhum matemático ou astrônomo se igualou a Eratóstenes nos cálculos para medir a circunferência da Terra.

Uma das questões que desafiaram os matemáticos e astrônomos da Antigüidade foi a determinação do tamanho do Sol e da Lua. Para chegar a essas medidas, era necessário conhecer o tamanho da circunferência da Terra.

Muitos dos matemáticos daquela época se dedicaram a medir a Terra, mas foi Eratóstenes que fez a demonstração mais interessante. Vejamos como ele procedeu.

Eratóstenes sabia o dia exato em que iria ocorrer o **solstício**[(1)] de verão na cidade de Assuan, às margens do rio Nilo. Nesse dia especial, ao meio-dia, o Sol ficava completamente a pino. Desse modo, uma vareta fincada verticalmente no solo não fazia nenhuma sombra nesse horário. E o fundo de um poço ficava completamente iluminado.

(1)- Solstício de verão:

Fincando uma vara num plano horizontal, durante a luz do sol, verificamos que o tamanho da sombra projetada pela vara apresenta variações. No início da manhã, o comprimento da sombra é bem longo, e vai diminuindo, até atingir um ponto mínimo, para logo depois voltar a se alongar até o pôr-do-sol.

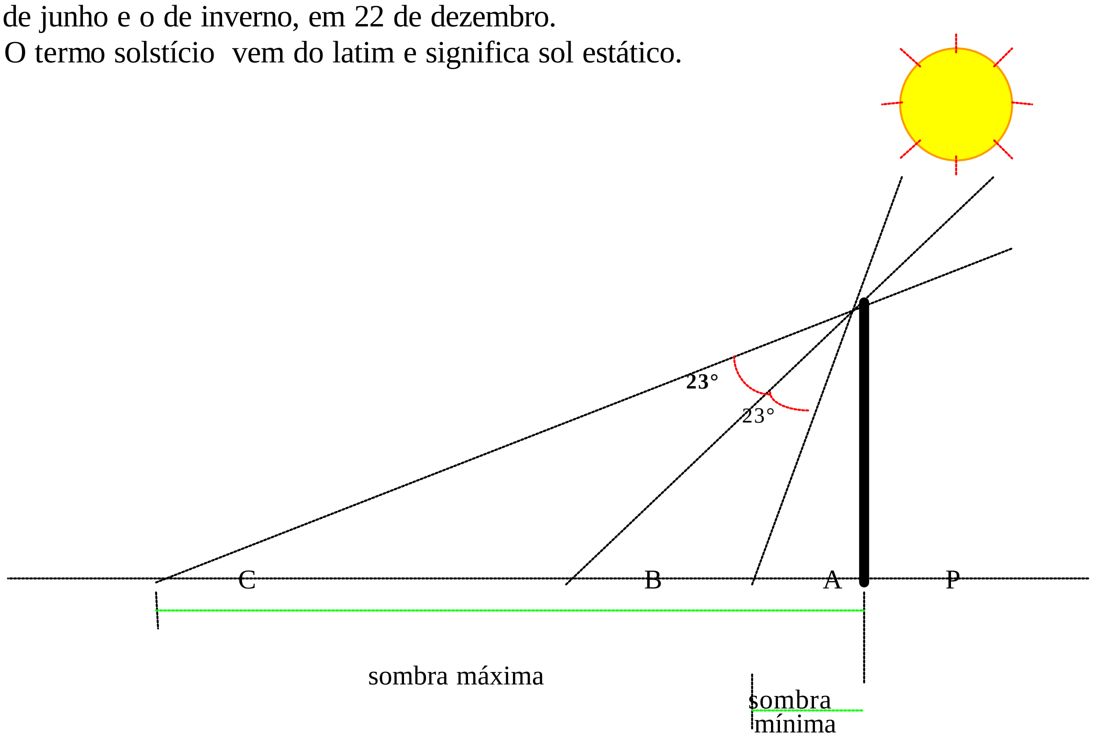
Chamamos de meio-dia o instante em que a sombra da vara tem o menor comprimento.

Se medirmos a sombra ao meio-dia, durante vários dias sucessivos, veremos que ela varia. Os antigos já sabiam que, quanto mais quente estivesse o clima, menor era a sombra do meio-dia.

Solstício de verão é o dia em que essa sombra é mínima. O solstício define o início do verão. Da mesma forma, o início do inverno é definido pelo solstício de inverno, dia em que a sombra do meio-dia é máxima.

Em São Paulo, o solstício de verão ocorre em 22 de dezembro e o solstício de inverno, em 22 de junho. Em Assuan, essas datas se invertem: o solstício de verão acontece em 22 de junho e o de inverno, em 22 de dezembro.

O termo solstício vem do latim e significa sol estático.



Aproveitando-se desse fato, Eratóstenes dirigiu-se à cidade de Alexandria e, aproximadamente no mesmo horário em que o Sol ficava a pino em Assuan, fincou verticalmente uma vareta no chão. A seguir, mediu o ângulo formado pela ponta da vareta com a extremidade da sombra.

Vamos acompanhar o raciocínio de Eratóstenes:

— **C** é o centro da Terra;

— a vareta em Assuan não forma sombra;

— **â** é o ângulo formado pela vareta e sua sombra, em Alexandria;

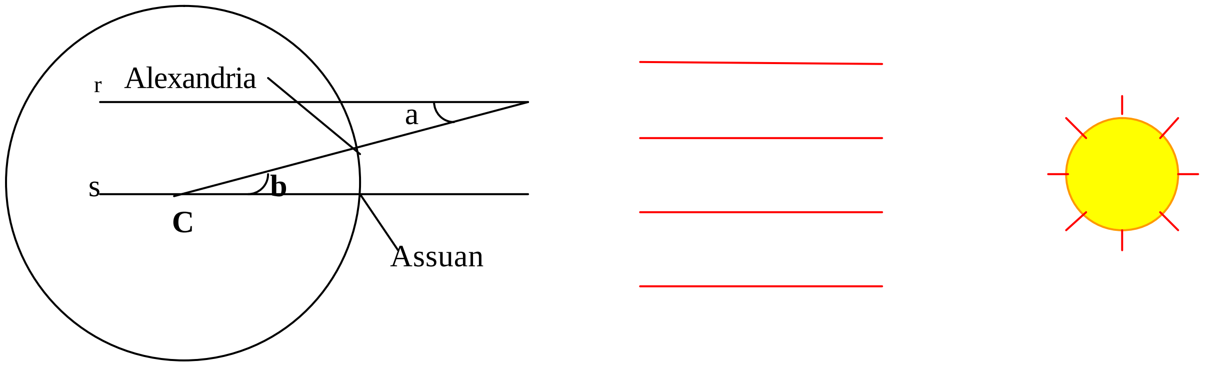
— **b** é o ângulo com vértice no centro da Terra, cujos lados são formados pelos prolongamentos das varetas fincadas em Alexandria e Assuan.

Como os raios de sol são aproximadamente paralelos, as retas **r** e **s** são paralelas e os ângulos **â** e **b** são alternos internos. Portanto, **â** e **b** são congruentes:

â = b

Eratóstenes descobriu que o ângulo **â** media 1/50 de toda a circunferência da Terra.

Como **â = b**, a distância entre Assuan e Alexandria também era 1/50 da circunferência da Terra.



A distância aproximada entre Assuan e Alexandria era de **5.000 stadium.** O stadium, antiga medida grega, valia:

1 Km = 6,3 stadium

Eratóstenes concluiu, então, que a circunferência da Terra era aproximadamente igual a:

50 x 5.000 = 250.000 stadium

Em quilômetros, temos:

1 Km --------------------- 6,3 stadium
x Km --------------------- 250.000 stadium

\

x @ **39. 682 Km**

Sem dúvida, determinar a medida da circunferência da Terra foi a grande façanha de Eratóstenes. Além disso, ele ainda se defrontou com um problema que até então os matemáticos não haviam resolvido: uma unidade prática para medir ângulos e arcos de circunferência.

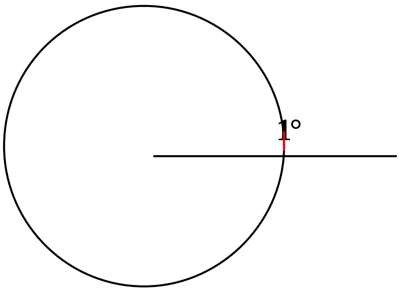
Entre os anos de 180 e 125 a.C., viveu na Grécia um matemático que se tornaria famoso: **Hiparco de Nicéia.**

Assim como a maioria dos matemáticos da sua época, Hiparco era fortemente influenciado pela matemática da Babilônia. Como os babilônios, ele também acreditava que a melhor base para realizar contagens era **base 60**.

Os babilônios não haviam escolhido a base 60 por acaso. O número 60 tem muitos divisores - 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60 - e pode ser facilmente decomposto num produto de fatores, o que facilita muito os cálculos, principalmente as divisões.

Foi por essa mesma razão que, ao dividir a circunferência, Hiparco escolheu um **múltiplo de 60:**

Cada uma das 360 partes iguais em que a circunferência foi dividida recebeu o nome de **arco de 1 grau.**



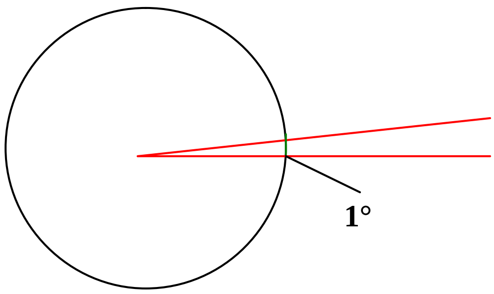
1 grau = 1°

Cada arco de 1 grau foi dividido em 60 partes iguais e cada uma dessas partes recebeu o nome de **arco de 1 minuto**. Cada arco de 1 minuto também foi dividido em 60 arcos de **1 segundo**.

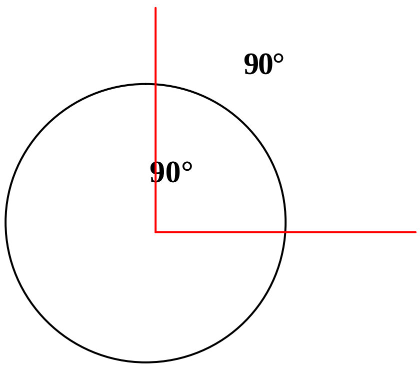
1 minuto = 1’
1 segundo = 1’’

Com a circunferência de 360°, ficou fácil criar uma unidade de medida para os ângulos:

— **ângulo de 1°** é um ângulo que determina um arco de 1° em qualquer circunferência com centro no vértice desse ângulo;

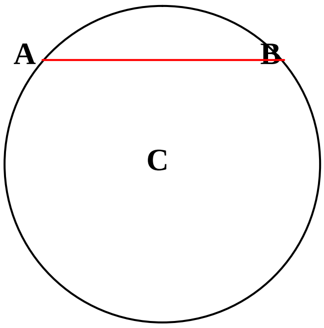


— **ângulo de 90°** é um ângulo que determina um arco de 90° em qualquer circunferência com centro no vértice desse ângulo.



Como vimos, a Matemática foi evoluindo de acordo com as necessidades do homem. Os astrônomos, por exemplo, precisavam descobrir um método prático e eficiente para calcular a distância, em linha reta, entre dois pontos situados na superfície terrestre. Hiparco, que além de matemático era astrônomo, também se deparou com essa questão quando determinou o comprimento da circunferência da Terra.

Numa circunferência, a distância entre dois pontos quaisquer **A** e **B** é chamada **corda**.



Hiparco construiu uma tabela com os valores das cordas de uma série de ângulos de 0° a 180°. A construção da primeira tabela trigonométrica da história da Matemática representou um grande avanço para a Astronomia e valeu a Hiparco o título de **Pai da Trigonometria**.

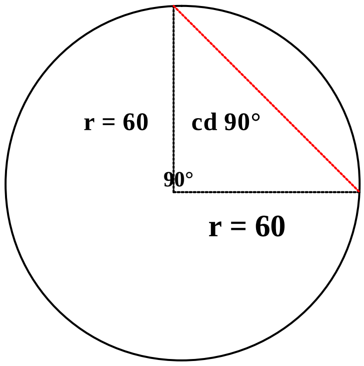
Esse título, porém, seria esquecido anos mais tarde, com o aparecimento da mais importante obra trigonométrica da Antigüidade: uma coleção de 13 livros denominada **Síntese matemática**.

A **Síntese matemática**, obra maior da Trigonometria, foi escrita no primeiro século da era cristã por **Ptolomeu de Alexandria**. Pouco sabemos sobre a vida desse matemático egípcio, mas sua obra é conhecida até hoje como **Almajesto,** que significa **o maior**

No **almajesto** encontramos uma tabela trigonométrica bem mais completa que a de Hiparco, onde são fornecidas as medidas das cordas de uma circunferência, para ângulos que variam de meio em meio grau, entre 0° e 180°.

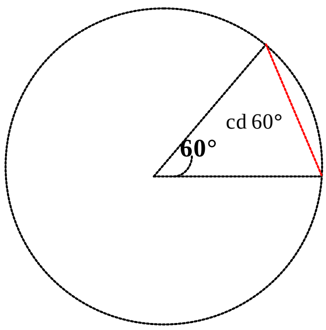
Para determinar essas medidas, Ptolomeu utilizou a base sexagesimal, o mesmo que fez Hiparco. Em todos os seus cálculos, portanto, ele usou numa circunferência com raio de **60 unidades**.

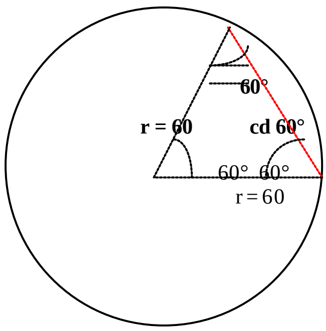
Usando o teorema de Pitágoras, Hiparco determinou a corda correspondente ao ângulo de 90°, que ele indica **cd 90°**:



$$(\text{cd } 90°)^2 = r^2 + r^2$$
$$(\text{cd } 90°)^2 = 2r^2$$
$$\text{cd } 90° = \sqrt{2r^2}$$
$$\text{cd } 90° = r\sqrt{2}$$
$$\text{cd } 90° = 60\sqrt{2}$$

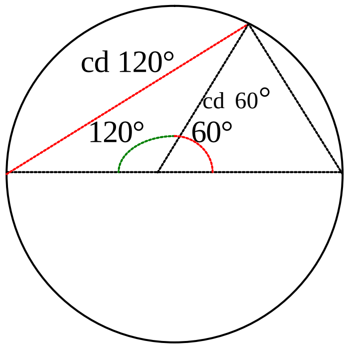
Para calcular a medida da corda de 60°, isto é, **cd 60°**, Hiparco observou que o triângulo formado é **equilátero**. Portanto:





cd 60° = r = 60

À medida que calculava o valor da corda de um ângulo, o matemático egípcio calculava também a corda do suplemento desse ângulo, aplicando mais uma vez o teorema de Pitágoras:



$$(\text{cd } 120°)^2 + (\text{cd } 60°)^2 = (r + r)^2$$

Como cd 60° = r, temos:

$$(\text{cd } 120°)^2 + r^2 = (2r)^2$$
$$(\text{cd } 120°)^2 = 4r^2 - r^2$$
$$(\text{cd } 120°)^2 = 3r^2$$
$$\text{cd } 120° = r\sqrt{3}$$

$$\mathbf{cd\ 120° = 60\sqrt{3}}$$

Durante seis séculos, o **Almajesto** representou a mais importante fonte de consulta para os astrônomos de todo o mundo. Era realmente a **coleção maior.**

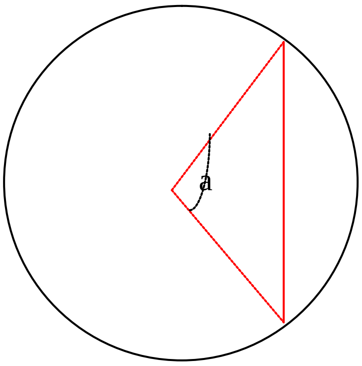
Apenas no século VIII é que os cientistas voltariam a sua atenção para as obras trigonométricas de um povo, que sempre surpreendera o mundo com sua matemática original e criativa. Estamos falando dos hindus.

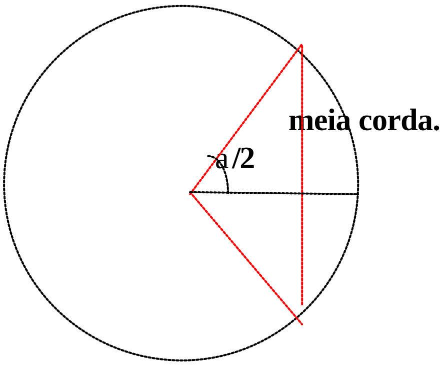
Apesar do amplo domínio do **Almajesto**, no final do século IV começou a surgir na Índia um conjunto de textos matemáticos denominado **Siddhanta**, cujo significado é **sistemas de astronomia**.

O **Siddhanta** era escrito em versos em **sânscrito**, uma língua muito antiga e difícil, usada apenas nas cerimônias religiosas. Apresentava regras enigmáticas de Astronomia e raríssimas explicações.

Quem poderia supor que esses textos, quase indecifráveis, iriam revolucionar a história da Trigonometria?

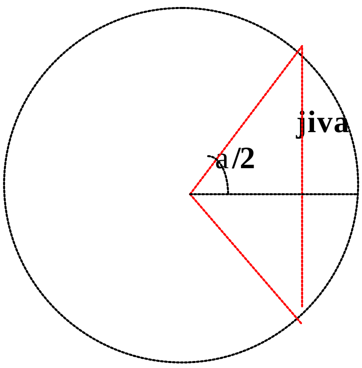
Os matemáticos e astrônomos ficaram surpresos quando se depararam pela primeira vez com o **Siddhanta**. Em vez de seguir o caminho do **Almajesto** de Ptolomeu, que relacionava as cordas de um círculo com os ângulos centrais correspondentes, os matemáticos hindus apresentavam uma Trigonometria baseada na relação entre a **metade da corda** e **metade do ângulo central**.





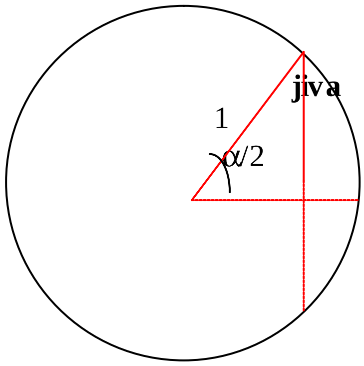
Mas, qual a vantagem de trabalhar com a meia corda, que os hindus chamavam de **jiva**?

A resposta é simples. Os hindus foram buscar, no interior do círculo, um **triângulo retângulo**.



Os autores do **Siddhanta** construíram uma tabela trigonométrica calculando os valores da meia corda para os valores da metade dos ângulos centrais correspondentes, em intervalos iguais de 3,75°, em até 90°.

Durante algum tempo os matemáticos árabes oscilaram entre o **Almajesto** e a Trigonometria de **jiva** O conflito chegou ao final quando, entre os anos 850 e 929, o matemático árabe **al-Battani** adotou a Trigonometria hindu, introduzindo uma preciosa inovação: **o círculo de raio unitário**.

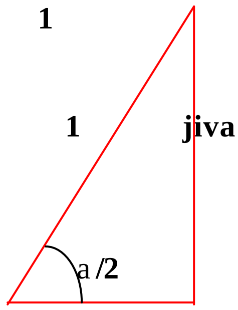


Assim, nas tabelas trigonométricas elaboradas a partir de al-Battani, o valor da corda correspondente a $\alpha/2$ podia ser interpretado como a seguinte razão:

$$\frac{\textbf{Cateto oposto}}{\textbf{Hipotenusa}} = \textbf{jiva}$$

Como todo número dividido por 1 é o próprio número, podemos escrever:

$$\frac{\textbf{Cateto oposto}}{\textbf{Hipotenusa}} = \frac{\textbf{jiva}}{\textbf{1}}$$



E essa razão iria se tornar muito famosa.

No começo do século XII, a Matemática árabe tinha atingido um desenvolvimento tão grande, que o restante do mundo não podia ficar alheio.

Foi feita uma série de traduções do árabe para o latim, o que possibilitou o desenvolvimento da Matemática na Europa. Os tradutores eram, na grande maioria, brilhantes matemáticos. Entre eles, destacava-se o inglês **Robert de Chester**.

Não devemos esquecer que os árabes, por sua vez, haviam traduzido textos de Trigonometria do sânscrito. Nesse processo, quando se depararam com a palavra **jiva** — meia corda —, eles simplesmente escreveram jiba. E mais, na língua árabe é comum escrever apenas as consoantes de uma palavra, deixando que o leitor acrescente mentalmente as vogais.

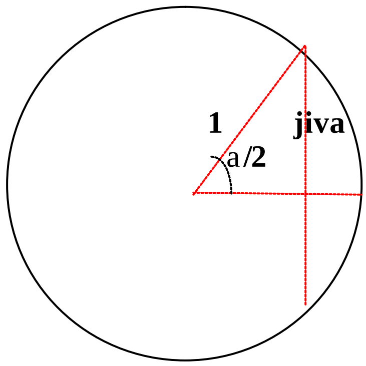
Assim, os tradutores árabes registraram:

jb

Na sua tradução do árabe para o latim, Robert de Chester interpretou **jb** como sendo as consoantes da palavra **jaib** que, em latim, significa **baía** ou **enseada** e escreve-se:

sinus

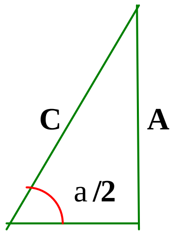
A partir daí, a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa de um triângulo retângulo passou a ser chamada de sinus (em português, seno).



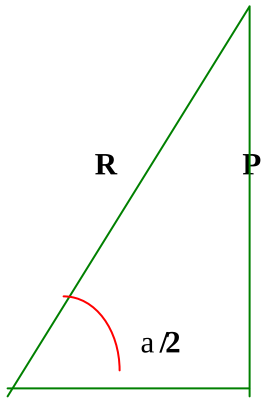
$$\mathbf{sen}\ \frac{a}{2} = \frac{\textbf{cateto oposto}}{\textbf{hipotenusa}} = \frac{\textbf{jiva}}{\textbf{1}}$$

A razão seno é válida para qualquer triângulo retângulo. Veja por quê.

Triângulos semelhantes têm os lados proporcionais. Assim, em qualquer triângulo retângulo que tiver um ângulo agudo medindo $\alpha/2$, a razão entre o cateto oposto ao ângulo $\alpha/2$ e a hipotenusa é denominada **seno de** a**/2**.

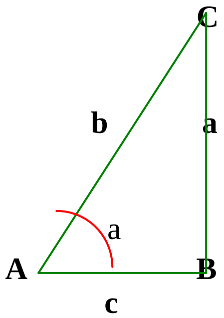


$$\text{sen}\ \frac{a}{2} = \frac{A}{C} = \frac{\text{jiva}}{1}$$



$$\text{sen}\ \frac{a}{2} = \frac{P}{R} = \frac{\text{jiva}}{1}$$

Toda a Trigonometria que estudamos hoje está baseada no **seno** dos hindus. Com o tempo, outras razões trigonométricas foram sendo criadas: o **coseno**, a **tangente** etc. Assim, dado o triângulo retângulo ABC, escrevemos:



Coseno é a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa.

$$\cos a = c/b$$

Tangente é a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente.

$$\text{tg}\ a = a/c$$